BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА. III.

М.Г.МАХМУДОВА
Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности классического решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвертого порядка. В работе доказаны: теорема о единственности в целом, теорема существования в малом и теорема существования в целом классического решения рассматриваемой смешанной задачи.

В работе изучаются вопросы существования и единственности классического решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - 2\alpha u_{txx}(t,x) + u_{xxxx}(t,x) = \\ = F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)) \quad (0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi), & (1) \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le \pi), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0 \le x \le \pi), & (2) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 \quad (0 \le t \le T), & (3) \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$; $0 < T < +\infty$; $F,\varphi,\psi -$заданные функции, а $u(t,x)-$ искомая функция, причём под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T]\times[0,\pi]$вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

Очевидно, что каждое классическое решение $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx, \tag{4}$$

где

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t,x)\sin nx dx \ \ (n = 1,2,\ldots; t \in [0,T]). \tag{5}$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение функций

$u_n(t)\ (n=1,2,\ldots)$, как показано в пункте 4 §1 работы $[1]$, сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_n(t)=\left(\tfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t+\cos\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t\right)\cdot e^{-\alpha n^2 t}\cdot\varphi_n+$$
$$+\tfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t\cdot e^{-\alpha n^2 t}\cdot\psi_n+\tfrac{2}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\cdot$$
$$\cdot\int_0^t\int_0^\pi F(u(\tau,x))\sin nx\cdot e^{-\alpha n^2(t-\tau)}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2(t-\tau)dxd\tau\ \ (n=1,2,\ldots;t\in[0,T]),\quad (6)$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\sin nxdx,\quad \psi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\psi(x)\sin nxdx\quad (n=1,2,\ldots),\qquad (7)$$

$$F(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)).\qquad (8)$$

Исходя из определения классического решения задачи (1)-(3) легко доказана следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ - любое классическое решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)\ (n=1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (6).

Далее, с помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 1. Пусть

1. $F(t,x,u_1,\ldots,u_6)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$.

2. $\forall R>0$ *в* $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^6$

$$|F(t,x,u_1,\ldots,u_6)-F(t,x,\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_6)|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{6}|u_i-\tilde{u}_i|,\qquad (9)$$

где $C_R>0-$ постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

Комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке доказана следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(4)}([0,\pi]),\ \varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,\pi)$ *и* $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=$
$=\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(\pi)=0;$

$\psi(x)\in C^{(2)}([0,\pi]),\ \psi'''(x)\in L_2(0,\pi)$ *и* $\psi(0)=\psi(\pi)=\psi''(0)=\psi''(\pi)=0.$

2. $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6),\ F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\left(i=\overline{0,6}\right),$

$F_{\xi_i\xi_j}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\ \left(i,j=\overline{0,6}\right)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right).$

3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=0\ \ \forall t\in[0,T],\xi_2,\xi_4,\xi_6\in(-\infty,\infty).$

Тогда существует в малом классическое решение задачи (1)-(3).

Замечание 1. Так как из условия 2 теоремы 2 следует выполнение всех условий теоремы 1, то при условиях теоремы 2 классическое решение задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

Далее, с целью доказательства теоремы существования в целом классического решения задачи (1)-(3), доказаны следующие четыре теоремы об априорной ограниченности (в определённом смысле) классических решений задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})=$$
$$=f(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})+f_0(x,u)+f_1(t,u_t)\cdot u_{tx}+\left(f_2(x,u_x)\right)_x, \qquad (10)$$

причем:

а) $f_0(x,u)\in C([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ *и* $\forall x\in[0,\pi],\ u\in(-\infty,\infty)$

$$\int_0^u f_0(x,\xi)d\xi\equiv g_0(x,u)\le C\cdot(1+u^2); \qquad (11)$$

б) $f_1(t,\upsilon)\in C([0,T]\times(-\infty,\infty));$

в) $f_2(x,\upsilon)\in C^1([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ *и* $\forall x\in[0,\pi],\ \upsilon\in(-\infty,\infty)$

$$-\int_0^\upsilon f_2(x,\xi)d\xi\equiv g_2(x,\upsilon)\le C+\delta\cdot\upsilon^2,\ 0\le\delta<\frac{1}{2\pi^2}; \qquad (12)$$

г) $f(t,x,u_1,\ldots,u_6)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$ *и в* $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6$

$$f(t,x,u_1,\ldots,u_6)\cdot u_5\le C\cdot\left(1+u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_5^2\right)+\delta_0\cdot u_6^2,\ 0\le\delta_0<2\alpha, \qquad (13)$$

$C>0$ – *постоянная, а* α $(0<\alpha<1)$ – *число, фигурирующее в уравнении* (1). Тогда для всевозможных классических решений $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедливы априорные оценки:

$$\int_0^\pi u_t^2(t,x)dx\le C_0,\ \int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx\le C_0\ \ \forall t\in[0,T];\ \int_0^T\int_0^\pi u_{tx}^2(t,x)dxdt\le C_0. \qquad (14)$$

Теорема 4. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.

2. $\forall R > 0$ *в* $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^2\times(-\infty,\infty)^4$

$$|F(t,x,u_1,\dots,u_6)| \le C_R\cdot\{1+|u_3|\cdot(|u_3|+|u_3|\cdot|u_5|+u_5^2+|u_6|)+ \\ +|u_4|\cdot(1+|u_5|)+|u_5|^3+|u_5|\cdot|u_6|+|u_6|\}, \quad (15)$$

т.е.

$$|F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})| \le C_R\cdot\{1+|u_{xx}|\cdot(|u_{xx}|+|u_{xx}|\cdot|u_t|+u_t^2+|u_{tx}|)+ \\ +|u_{xxx}|\cdot(1+|u_t|)+|u_t|^3+|u_t|\cdot|u_{tx}|+|u_{tx}|\}, \quad (16)$$

где $C_R > 0 -$ постоянная.

Тогда всевозможные классические решения задачи (1)-(3) априори ограничены в

$$C([0,T];W_2^3(0,\pi))\cap C^{(1)}([0,T];W_2^1(0,\pi)).$$

Теорема 5. Пусть

1. $F(t,\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_6)$, $F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_6)$ $\left(i=\overline{0,6}\right)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$.

2. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=0 \quad \forall t\in[0,T],\ \xi_2,\xi_4,\xi_6\in(-\infty,\infty)$.

3. *Выполнены все условия теоремы 4.*

4. $\forall R>0$ *в* $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_6)\right| \le C_R\cdot(1+\xi_4^2+\xi_6^2) \quad (i=0,1,2), \quad (17)$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_6)\right| \le C_R\cdot(1+|\xi_4|+|\xi_6|) \quad (i=3,5), \quad (18)$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_6)\right| \le C_R \quad (i=4,6), \quad (19)$$

где $C_R > 0 -$ постоянная.

Тогда всевозможные классические решения задачи (1)-(3) априори ограничены в

$$C([0,T];W_2^4(0,\pi))\cap C^{(1)}([0,T];W_2^2(0,\pi)).$$

Теорема 6. Пусть:

1. Выполнены все условия теоремы 2.
2. Выполнены все условия теоремы 3.
3. Выполнено условие 2 теоремы 4.
4. Выполнено условие 4 теоремы 5.

Тогда всевозможные классические решения задачи (1)-(3) априори ограничены в

$$C([0,T];W_2^5(0,\pi))\cap C^{(1)}([0,T];W_2^3(0,\pi)).$$

Наконец, пользуясь теоремами 2-6, доказана следующая теорема о существовании в целом классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 7. Если выполнены все условия теоремы 6, то задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение.

Замечание 2. В заключение отметим, что данная работа является продолжением работ [1]-[5], в которых изучены вопросы существования и единственности обобщенного и почти всюду решений задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Махмудова М.Г. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка.I. -Бакинский Государственный Университет, Баку, 2005 г., 42 с. (рукопись депонирована в АЗНИИНТИ 24.10.2005, №2783-Аз.).
2. Худавердиев К.И., Махмудова М. Г. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка. – Тезисы Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл.корр. НАНА, профессора И.Т. Мамедова, с.85.
3. Махмудова М.Г. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка.I.-Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2006 г., №1, с. 41-51.
4. Махмудова М.Г. Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка.-Тезисы научной конференции «Теоретические и прикладные задачи операторных уравнений», посвященной 75-летию чл.корр. НАНА, профессора Я.Дж.Мамедова, с.93-94.
5. Махмудова М. Г. Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка. II.-Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2006 г., № 2, с. 70-74.
6. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений.- Дисс…докт.физ.-мат. наук, Баку, 1973 г., Азербайджанский Государственный Университет, 319 с.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ BİR BUSSİNESK TƏNLİYİ ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN KLASSİK HƏLLİNİN TƏDQİQİ. III.

M.H.MAHMUDOVA

XÜLASƏ

İş dördüncü tərtib yarım-xətti bir Bussinesk tənliyi üçün birölçülü qarışıq məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. İşdə baxılan qarışıq məsələnin klassik həllinin qlobal yeganəliyi, lokal və qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilmişdir.

STUDY OF CLASSICAL SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A SEMI-LINEAR FOURTH ORDER BOUSSINESQ EQUATION. III.

M.H.MAHMUDOVA

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of classical solution of one-dimensional mixed problem for a semi-linear fourth order Boussinesq equation. Uniqueness theorem in large, existence theorem in small and existence theorem in large for the classical solution of the mixed problem under consideration are also proved in this work.